Minimalcurven als Örter von Krümmungsmittelpunkten.

Von E. Study.

Die vorliegende Mittheilung enthält eine Erzeugungsweise der krummen Minimallinien, die, obwohl sie eigentlich recht nahe liegt, bis jetzt nicht bemerkt worden zu sein scheint, und einige sich daran anschliessende Entwickelungen, bei denen es sich im Grunde um eine Berührungstransformation handelt.

Wir benutzen die Methode und die Bezeichnungen, die kürzlich in den *Transactions of the American Mathematical Society* entwickelt worden sind. (Vol. X, 1909, pp. 1–49, citiert mit *A. C.*, und Vol. XI, 1910, citiert mit *N. Gl.*)

§ 1. *Curven auf Minimalkegeln.*

Der Formel, die zur Darstellung des Ortes der Krümmungsmittelpunkte einer regulären Curve dient,

$$y \equiv x + R \,.\, \beta \qquad \{A.\ C.,\ \text{Nr. } 10\}, \tag{1}$$

lässt sich folgender Lehrsatz entnehmen:

Unter den unebenen regulären Curven haben die mit constantem Radius der Schmiegungskugel die charakteristische Eigenschaft, dass ihr Torsionswinkel in constantem Verhältnisse steht zum Bogenelemente des zugehörigen Ortes der Krümmungsmittelpunkte.

Aus (1) ergiebt sich nämlich, mit Hülfe der *Frenet*'schen Gleichungen (*A. C.*, Nr. 9),

$$\frac{dy}{ds} \equiv \frac{dR}{ds}\,\beta + \frac{R}{T}\,\gamma\,, \tag{2}$$

also

$$\sqrt{dy\,|\,dy} \equiv \sqrt{\frac{R^2}{T^2} + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2} \,.\, ds \equiv \mathfrak{R} \,.\, \frac{ds}{T}, \tag{3}$$

woraus unmittelbar der Satz abgelesen wird. Die unebenen regulären Curven mit constantem Radius $\mathfrak{R}$ der Schmiegungskugel sind theils solche der constanten

Krümmung $\pm \frac{1}{R} = \pm \frac{1}{\mathfrak{R}}$, theils sphärische Curven. Im Falle $\mathfrak{R} = 0$ aber ist nur der zweite Fall möglich. So sehen wir, dass auch folgender Lehrsatz gilt:

Die unebenen Curven auf Minimalkegeln sind dadurch gekennzeichnet, dass die zugehörigen Örter von Krümmungsmittelpunkten Minimalcurven sind.

Die Minimallinien, die man auf diese Art findet, können niemals gerade sein, andere Besonderheiten aber haben sie nicht:

Auf jedem Minimalkegel liegt eine einzige analytische Curve, die eine vorgeschriebene krumme Minimallinie zum Ort der Krümmungsmittelpunkte hat.

Hiervon kann man sich sehr leicht überzeugen. Es sei o der Scheitel des gegebenen Minimalkegels. Der zweite Kegel, der die Curve (y), Ort der Punkte y, aus o projiciert, wird dann für die zu construierende Curve (x) als Evolutenfläche zu fungieren haben. Die Punkte o, x, y müssen nun ein rechtwinkliges Dreieck bilden, mit dem rechten Winkel bei y, und zwar ein Dreieck, dessen Hypotenuse die Länge Null hat. Nennen wir z den Punkt in der Mitte zwischen o und x, so ist z Mittelpunkt eines Kreises durch o, x, y, der in die Minimalgerade durch o und x und eine zweite Minimalgerade durch o und y zerfällt. Diese zweite Gerade aber ist Tangente an die Curve (y) im Punkte y. Man kann also etwa so verfahren: Man suche den eigentlichen Schnittpunkt z der Tangente des Punktes y mit dem gegebenen Minimalkegel, und verdoppele sodann den Vector (Minimalvector) von o nach z. Der Endpunkt x des verdoppelten Vectors wird dann auf dem Minimalkegel eine Curve beschreiben, zu der die Gerade $\overline{oy}$ als Krümmungsaxe des Punktes x gehört; y wird der Fusspunkt des Lothes von x auf diese Gerade, und der Ort von y also Ort der Krümmungsmittelpunkte für die Curve (x). Man erhält hieraus sofort

$$x \equiv 2y - \frac{(y/y)}{(y/y')} \cdot y'. \tag{4}$$

Der in dieser Formel auftretende Nenner (y/y') kann nicht identisch verschwinden, da dann $(y/y) \equiv$ const. folgen würde, die als krumm vorausgesetzte Mimimalcurve also sphärisch sein müsste, was unmöglich ist.

$$R^2 \equiv -(y/y) \tag{5}$$

ist der zu x gehörige quadrierte Krümmungsradius. Hat man aus (4) den Ort von x gefunden, so ergiebt sich aus diesem wieder der Ort von y nach der Regel (1), also

$$y \equiv x + \frac{(x'/x')\{(x'/x')x'' - (x'/x'')x'\}}{(x'x''/x'x'')}. \tag{6}$$

Vorausgesetzt ist hier, dass der vorgeschriebene Minimalkegel vom Anfangspunkt der Coordinaten ausgeht.

§ 2. *Specielle Darstellung der betrachteten Curven.*

Wir nehmen jetzt an, dass die *Minimalcurve* gegeben und dargestellt sei mit Hülfe einer charakteristischen Function $f(s)$ {deren dritter Differentialquotient nicht identisch verschwindet}, und zwar in der vom Verfasser bevorzugten Form:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv i \cdot \left\{f - s \cdot f_1 - \frac{1-s^2}{2} \cdot f_2\right\}, \\ y_2 &\equiv \left\{f - s \cdot f_1 + \frac{1+s^2}{2} \cdot f_2\right\}, \\ y_3 &\equiv -i \cdot \{f_1 - s f_2\}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Man findet dann

$$R^2 \equiv -(y/y) \equiv f_1^2 - 2ff_2, \quad (y/y'_s) \equiv f \cdot f_3, \tag{8}$$

und

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\equiv -\frac{i}{2f} \cdot \left\{f_1^2 - (sf_1 - 2f)^2\right\}, \\ x_2 &\equiv \frac{1}{2f} \cdot \left\{f_1^2 + (sf_1 - 2f)^2\right\}, \\ x_3 &\equiv \frac{i}{2f} \cdot \left\{2f_1 \cdot (sf_1 - 2f)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Vergleicht man diese Formeln mit den zur Darstellung der Curven auf einem Minimalkegel dienenden (*N. Gl.*, § 1, Nr. 7):

$$x_1 \equiv -i\,\frac{1 - S^2(P)}{2\,S'(P)}, \quad x_2 \equiv \frac{1 + S^2(P)}{2\,S'(P)}, \quad x_3 \equiv i \cdot \frac{2\,S(P)}{2\,S'(P)}, \tag{10}$$

so ergiebt sich

$$S \equiv s - 2\frac{f(s)}{f_1(s)}, \quad \frac{dS}{dP} \equiv \frac{f(s)}{f_1^2(s)}, \tag{11}$$

und

$$\frac{dP}{ds} \equiv \frac{2ff_2 - f_1^2}{f(s)}.$$

Man kann also zunächst durch eine Quadratur den natürlichen Parameter P der Curve (x) als Function von s bestimmen, und hierauf, mit Hülfe einer Elimination,

die Function $S(P)$. Die zur natürlichen Gleichung der Curve (x) gehörige Function $\Phi(P)$ hat den Werth

$$\Phi(P) \equiv \frac{1}{R^2} \equiv \frac{1}{f_1^2 - 2ff_2}. \tag{12}$$

Zweitens gehen wir von der *Curve auf dem Minimalkegel* (Nr. 10) als von dem Gegebenen aus. Diese Curve müssen wir als uneben voraussetzen, wenn wir wieder eine Curve, und folglich eine Minimalcurve, als Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte erhalten wollen. Es ist also (*A. C.*, S. 34) der Fall $\Phi(P) \equiv$ const. auszuschliessen, der sich ja auch bei der eben ausgeführten umgekehrten Rechnung nicht ergeben hatte (Nr. 12). Es ist mithin anzunehmen, dass

$$S'S'S'''' - 4S'S''S''' + 3S''S''S'' \not\equiv 0 \tag{13}$$

ist, womit insbesondere auch das Bestehen der Ungleichheit $3S''S'' - 2S'S''' \not\equiv 0$ gesichert ist.

Nunmehr findet sich

$$\left.\begin{aligned} y_1 &\equiv -\frac{i}{2}\,\frac{(1-SS)(S''S''-S'S''')+2S'S'(S'S'-SS'')}{S'(3S''S''-2S'S''')}, \\ y_2 &\equiv \frac{1}{2}\,\frac{(1+SS)(S''S''-S'S''')-2S'S'(S'S'-SS'')}{S'(3S''S''-2S'S''')}, \\ y_3 &\equiv \frac{i}{2}\,\frac{2S(S''S''-S'S''')+2S'S'S''}{S'(3S''S''-2S'S''')}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Dies ist wirklich die Parameterdarstellung einer Minimallinie, deren Tangente in y den ebenfalls bekannten Punkt $\frac{1}{2}x$ enthält. Nennt man ξ irgend einen nicht verschwindenden Vector, der zu dieser Verbindungslinie gehört, so wird $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 \equiv dy_1 : dy_2 : dy_3$, und dann kann, da die Gleichungen (7) die Proportion

$$dy_1 : dy_2 : dy_3 \equiv -i\,\frac{1-s^2}{2} : \frac{1+s^2}{2} : 2is$$

nach sich ziehen (*A. C.*, Nr. 44), der zur Curve y gehörige Parameter s aus den Gleichungen

$$s \equiv \frac{\xi_1 + i\xi_2}{\xi_3} \equiv -\frac{\xi_3}{\xi_1 - i\xi_2}$$

gefunden werden. Bei Durchführung der Rechnung wird man etwa $\xi_k = y_k - \frac{1}{2}x_k$ setzen; man erhält dann

$$s \equiv S - 2\,\frac{S'S'}{S''}. \tag{15}$$

Die Gleichungen (11) zeigen nunmehr, dass

$$f \equiv \frac{S' S' S'}{S'' S''}, \quad f_1 \equiv -\frac{S'}{S''}, \quad f_2 \equiv \frac{S'' S'' - S' S'''}{S'(3 S'' S'' - 2 S' S''')} \tag{16}$$

sein muss. In der That liefert die Substitution der Werthe (15) und (16) in die Gleichungen (7) das Gleichungssystem (14). Durch Elimination des Parameters P ergiebt sich schliesslich f als Function von s.

Die abgeleiteten Resultate lassen sich kurz so zusammenfassen:

Die krumme Minimallinie $f = f(s)$ ist Ort der Krümmungsmittelpunkte für die auf dem Minimalkegel

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

verlaufende unebene Curve $S \equiv S(P)$.

Ist die Function $f(s)$ gegeben — so dass $f'''(s) \not\equiv 0$ — so werden P und $S(P)$ aus den Gleichungen

$$P \equiv \int \frac{2ff'' - f'f'}{f'} ds, \quad S \equiv \frac{sf' - 2f}{f'}$$

bestimmt. Es ist dann, wenn S als Function von P betrachtet wird, der Differentialausdruck

$$S' S' S'''' - 4 S' S'' S''' + 3 S'' S'' S''$$

nicht identisch gleich Null.

Wird umgekehrt die Function $S(P)$ dieser Bedingung gemäss angenommen, so dienen zur Bestimmung von s und $f(s)$, also zur Bestimmung der Minimalcurve, die Gleichungen

$$s \equiv \frac{S S'' - 2 S' S'}{S''}, \quad f \equiv \frac{S' S' S'}{S'' S''}.$$

Es kann dann, wenn f als Function von s betrachtet wird, der dritte Differentialquotient $f'''(s)$ nicht identisch verschwinden.

§ 3. *Minimalcurven, die aus anderen durch Derivation abgeleitet sind.*

Nach der vom Verfasser entwickelten Theorie (*A. C.*, § 6) gehört zu jeder krummen Minimallinie ein *sphärisches Bild*, ein Ort von Punkten auf einem beliebigen Minimalkegel. Dieses Bild kann aus einer einzigen analytischen Curve oder auch aus deren zweien bestehen, die dann durch die Spiegelung am Scheitel des Minimalkegels in einander übergehen. Der erste Fall tritt dann ein, wenn die beiden Werthe des Differentials des natürlichen Parameters auf der Curve einen analytischen Zusammenhang haben; der zweite, wenn dies

nicht stattfindet. Entscheidet man sich im zweiten Falle für eine der beiden möglichen Annahmen über den natürlichen Parameter, so erhält man auch im zweiten Falle eine bestimmte analytische Curve als sphärisches Bild. Im ersten Falle aber wird man sich die Minimalcurve doppelt überdeckt denken, entsprechend den beiden Werthen des genannten Differentials. Sagen wir, die Curve sei durch die beschriebenen Processe *orientiert*, so entspricht nunmehr jedem Punkte der orientierten (einfach oder doppelt überdeckten) Curve eine völlig *bestimmte* Stelle des sphärischen Bildes, das jetzt immer eine einzelne analytische Curve ist.

Wir wollen nun die im vorigen Paragraphen betrachtete Curve auf dem Kegel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ mit dem sphärischen Bilde einer orientierten Minimallinie identificieren. Dies erreichen wir, wenn wir die letzte Curve in der Form

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &\equiv i\left\{F - SF_1 - \frac{1-S^2}{2}F_2\right\}, \\ Y_2 &\equiv \left\{F - SF_1 + \frac{1+S^2}{2}F_2\right\}, \\ Y_3 &\equiv -i\left\{F_1 - SF_2\right\} \quad \{F_3 \not\equiv 0\} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

darstellen, über den Werth der Wurzelgrösse $\sqrt{F_3(s)}$ bestimmt verfügen, und den natürlichen Parameter P aus der Gleichung

$$P \equiv \int \sqrt{F_3} \, . \, dS \tag{18}$$

bestimmen. P ist dann zugleich natürlicher Parameter für das sphärische Bild der orientierten Curve:

$$x_1 \equiv -i\frac{1-S^2}{2}\sqrt{F_3}, \quad x_2 \equiv \frac{1+S^2}{2}\sqrt{F_3}, \quad x_3 \equiv is\sqrt{F_3} \tag{19}$$

(vergl. *A. C.*, Nr. 48). Ist dieses Bild eine unebene Curve (*A. C.*, S. 34), gehört also die gegebene Minimalcurve nicht zur Familie der gemeinen Schraubenlinien (*A. C.*, S. 41), so gehört dazu eine Krümmungsmittelpunktscurve $f \equiv f(s)$ (Nr. 7) die als *Derivierte* der vorgelegten orientierten Minimalcurve $F \equiv F(S)$ (Nr. 17, 18) bezeichnet werden kann.

Die im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln setzen nun den Zusammenhang in Evidenz, der zwischen den charakteristischen Functionen $F(S)$ und $f(s)$ der beiden betrachteten Minimalcurven besteht: Man hat nur in die Gleichungen (11, 15, 16) die Annahme $dP : dS \equiv \sqrt{F_3(S)}$ einzuführen. Es ergiebt sich also:

Zu jeder orientierten Minimalcurve $\{F \equiv F(S), \sqrt{F_3}\}$, *die nicht in der Familie der gemeinen Minimalschraubenlinien enthalten ist*

$$\{4 F_3^2 F_6 - 18 F_3 F_4 F_5 + 15 F_4^3 \not\equiv 0\},$$

gehört eine bestimmte krumme Minimallinie als Derivierte — Ort der Krümmungsmittelpunkte des sphärischen Bildes — die gefunden wird mit Hülfe der Gleichungen

$$s \equiv S + 4 \frac{F_3}{F_4}, \quad f(s) \equiv 4 \frac{F_3^2}{F_4^2} \sqrt{F_3}. \tag{20}$$

Umgekehrt ist jede krumme Minimallinie $\{f \equiv f(s), f_3(s) \not\equiv 0\}$ *Derivierte von* ∞^6 *orientierten Minimalcurven, die durch die Gruppe aller Schiebungen in einander übergehen. Diese Curven werden bestimmt aus den Gleichungen*

$$S \equiv s - \frac{2f}{f_1}, \quad \sqrt{F_3(S)} \equiv \frac{f_1^2}{f}. \tag{21}$$

Man überzeugt sich leicht durch Ausrechnung davon, dass jedes der Gleichungssysteme (20), (21) das andere zur Folge hat.

Das einfachste Beispiel zu unserem Satze liefern die Minimalcurven 3. Ordnung, betrachtet als Krümmungsmittelpunktscurven, wenn der Scheitel des Kegels $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ auf der Curve selbst angenommen wird. Jede solche Figur ist congruent zu der durch die Annahme $f(s) = \frac{1}{6} s^3$ gegebenen. Sie gehört als Derivierte zu ∞^6 ebenfalls rationalen Minimalcurven 5. Ordnung.

NEAPEL, 5. *November*, 1909.